Szeregi 2

1 Wielka suma statystyczna układu cząstek dana jest jako:

$$Z = \prod_i Z_i,$$

gdzie dla bozonów $Z_i = \sum_{n_i=0}^{\infty} e^{-\beta n_i(\varepsilon_i-\mu)}$, dla fermionów $Z_i = \sum_{n_i=0}^{1} e^{-\beta n_i(\varepsilon_i-\mu)}$, a dla gazu Maxwella-Boltzmanna $Z_i = \sum_{n_i=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta n_i(\varepsilon_i-\mu)}}{n_i!}$.

Wykaż, że:

(a) dla bozonów $Z_i = \dfrac{1}{1-e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)}}$,

(b) dla fermionów $Z_i = 1 + e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)}$,

(c) dla gazu Maxwella-Boltzmanna $Z_i = \exp\left(e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)}\right)$.

Rozwiązanie

Rozwiązania

1 (a) Wykażemy, że dla bozonów $Z_i = \dfrac{1}{1-e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)}}$.

$$\begin{aligned} Z_i &= \sum_{n_i=0}^{\infty} e^{-\beta n_i(\varepsilon_i-\mu)} \\ &= e^{-\beta 0(\varepsilon_i-\mu)} + e^{-\beta 1(\varepsilon_i-\mu)} + e^{-\beta 2(\varepsilon_i-\mu)} + \ldots + e^{-\beta N(\varepsilon_i-\mu)} + \ldots \end{aligned}$$

Niech $x = e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)}$, zatem $Z_i = 1 + x + x^2 + \ldots + x^N + \ldots = \dfrac{1}{1-x}$.

Czyli

$$Z_i = \frac{1}{1-e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)}}.$$

(b) Wykażemy, że dla fermionów $Z_i = 1 + e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}$.

$$\begin{aligned} Z_i &= \sum_{n_i=0}^{1} e^{-\beta n_i(\varepsilon_i-\mu)} \\ &= e^{-\beta 0(\varepsilon_i-\mu)} + e^{-\beta 1(\varepsilon_i-\mu)} \\ &= 1 + e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)} \end{aligned}$$

(c) Wykażemy, że dla gazu Maxwella-Boltzmanna $Z_i = \exp\left(e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)}\right)$.

$$\begin{aligned} Z_i &= \sum_{n_i=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta n_i(\varepsilon_i-\mu)}}{n_i!} \\ &= \frac{e^{-\beta 0(\varepsilon_i-\mu)}}{0!} + \frac{e^{-\beta 1(\varepsilon_i-\mu)}}{1!} + \frac{e^{-\beta 2(\varepsilon_i-\mu)}}{2!} + \ldots + \frac{e^{-\beta N(\varepsilon_i-\mu)}}{N!} + \ldots \end{aligned}$$

Niech $x = e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)}$, zatem

$$Z_i = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^N}{N!} + \ldots = \exp(x).$$

Czyli

$$Z_i = \exp\left(e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)}\right).$$

Pytanie